

基于仿射点对应的分层重构

张淮峰 吴福朝 胡占义

(中国科学院自动化研究所模式识别国家重点实验室 北京 100080)

摘 要 提出了一种基于仿射点对应的分层重构方法,所谓仿射点对应是指相差一个仿射变换的两个空间点集的图像对应.该方法主要分为以下三个步骤:首先,从点对应计算准仿射重构;然后,由仿射点对应的准仿射重构建立一个三维射影变换,并利用这个射影变换的特征向量来确定无穷远平面,从而得到仿射重构;最后,从仿射重构所获得的无穷远平面单应矩阵标定摄像机内参数,进而得到度量重构.在上述三个步骤中,第二个步骤是最关键的,即如何确定对应于无穷远平面的特征向量,这也是该文的新思想和主要贡献所在.仿真和真实图像实验均表明,该方法的方法是有效的,并且有很好的鲁棒性.

关键词 分层重构;仿射点对应;无穷远平面;射影变换;仿射重构;欧氏重构
中图法分类号 TP18

A Stratified Reconstruction Algorithm Based on Affine Point Correspondences

ZHANG Huai-Feng WU Fu-Chao HU Zhan-Yi

(National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract In this paper, a new stratified reconstruction algorithm is proposed which is based on affine point correspondences. The affine point correspondences here mean image correspondences which are projected by two sets of space points related by a general 3D affine transformation. The proposed algorithm consists of the following three main steps: First, the quasi-affine reconstruction is obtained from correspondences of image points; Second, the 3D projective transformation matrix between the two sets of quasi-affinely reconstructed points in the first step is computed, then the eigenvector which corresponds to the plane at infinity is determined, by which the quasi-affine reconstruction is upgraded to a true affine reconstruction; Third, the camera intrinsic parameters are calibrated by means of the infinite homography obtained in the second step, and a metric reconstruction is obtained. Among the above three steps, the key one is the second step, *i.e.*, how to determine the eigenvector corresponding to the plane at infinity, and that is where the novelty and main contributions of this paper lie. Experiments on simulated data and on real images confirm the robustness of the new algorithm.

Keywords stratified reconstruction; affine point correspondences; plane at infinity; projective transformation; affine reconstruction; Euclidean reconstruction

1 引言

三维重构是计算机视觉研究的核心问题之一.

一般来说,度量重构(metric reconstruction)可以通过两种方法得到:(1)已知场景中三维点的空间坐标和对应的图像点,直接计算出摄像机投影矩阵^[1,2],由此得到场景的三维度量重构.这种方法需要在场

收稿日期:2004-07-02;修改稿收到日期:2005-04-22.本课题得到国家自然科学基金(60275009)资助.张淮峰,男,1976年生,博士,现在澳大利亚悉尼技术大学(UTS)进行博士后研究,主要研究领域为图像匹配、摄像机定标、三维重建和模式识别.吴福朝,男,1957年生,研究员,博士生导师,主要研究内容包括摄像机自标定、三维重建、机器人自定位等.胡占义,男,1961年生,研究员,博士生导师,主要研究领域为摄像机标定、三维重建、主动视觉、Hough变换、视觉机器人导航及基于图像的建模和绘制. E-mail: huzy@nlpr.ia.ac.cn.

景中放置精密设计的定标块,从而限制了它的应用。(2)自从1992年Faugeras^[3]提出自定标的概念,分层重构及自定标成为三维重构中最活跃的一个研究领域,有许多学者提出了不同的分层重构算法^[4-6]。分层重构将重构分成以下三个层次:射影重构、仿射重构和度量重构,其中最困难的步骤是仿射重构。仿射重构的本质是求解无穷远平面在射影空间的表示(或者简略地说,确定无穷远平面)。Pollefeys^[4]首先利用模约束来确定无穷远平面,一般情况下模约束需要求解一个三元四次方程组,由于数据噪声的影响,这个三元四次方程组通常是不相容的,因此在数值计算上往往归结为非线性优化问题。研究表明模约束法对数据噪声极其敏感。为了简化计算,增强算法的鲁棒性,人们尽可能地利用场景的几何结构信息和摄像机的运动信息进行重构,例如基于消隐点(线)的重构方法^[7,8]; Sturm和Maybank^[9]给出的基于场景平面信息重构算法; Fitzgibbon和Zisserman^[10]给出的基于场景中独立运动物体的重构方法; Horaud^[11]等给出的基于立体视觉平台(stereo rig)的三维重构方法,等等。本文主要讨论基于场景几何结构信息的三维重构方法。

在本文中,我们提出了一种基于仿射点对应的分层重构方法。该方法首先从点对应计算一种特殊的射影重构——准仿射重构(quasi-affine reconstruction);再根据仿射点对应的准仿射重构建立一个三维射影变换,利用这个射影变换的特征向量来确定无穷远平面,从而得到仿射重构;从仿射重构计算出摄像机的内参数矩阵,最终得到度量重构。在某种程度上,仿射点对应是度量重构所需要的最起码的几何结构信息,如前面所提到的基于消隐点(线)的重构、基于运动物体的重构、基于立体视觉平台的重构以及基于镜面反射的重构、基于相似物体的重构等等,都可以使用本文方法来实现。所以本文所给出的方法除理论价值外,还具有较大的实用价值。

本文第2节将给出仿射点对应的涵义并列出几种仿射点对应的特例;第3节简要介绍准仿射重构;第4节是本文的主要部分,着重讨论基于仿射点对应的仿射重构理论及方法;第5节是度量重构;第6节是实验结果;最后一节是结束语。

2 仿射点对应

如果两幅图像(I, I')间的两组点对应

$$\begin{aligned} x &= \{m_1, m_2, \dots, m_m\} \leftrightarrow x' = \{m_1, m_2, \dots, m_m\}, \\ y &= \{n_1, n_2, \dots, n_m\} \leftrightarrow y' = \{n_1, n_2, \dots, n_m\} \end{aligned}$$

满足下述性质:点对应 $x \leftrightarrow x'$ 的空间点集 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ 与 $y \leftrightarrow y'$ 的空间点集 $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$ 之间相差一个仿射变换,即存在仿射变换

$$A = \begin{pmatrix} B & b \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

使得 $Y_j = AX_j, j = 1, 2, \dots, m$ 。这里, B 为任意非奇异的 3×3 矩阵, b 为任意三维向量, $\mathbf{0}$ 为三维零向量。上式可简记为

$$Y = AX \quad (1)$$

我们称两组点对应 $x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y'$ 为仿射点对应。

本文中,图像点 m 和空间点 X 都使用最后一个元素归一化的齐次坐标,即 $m = (u \ v \ 1)^T, X = (x \ y \ z \ 1)^T$ 。

下面所陈述的一系列问题中均存在仿射点对应,因此它们都可以用本文方法来解决。

相似物体 已知两个相似物体的一组对应特征点的图像,计算景物的度量重构。因为物体与相似,则必存在一个相似变换 S 使得

$$S = \begin{pmatrix} sU & u \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

这里, U 是 3×3 正交矩阵。因此,两个相似物体与的任一组对应特征点的图像均构成仿射点对应。

镜面反射 已知一个物体及其镜面反射在图像中的投影,计算景物的度量重构^[12,13]。令 Y 是物体的镜面反射,则必存在一个反射变换 M 使得

$$M = \begin{pmatrix} U & u \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

这里, U 是 3×3 反射变换矩阵。因此,物体与它的镜面反射的任一组对应特征点的图像都构成仿射点对应。

运动物体 已知运动物体在两个摄像机下不同时刻的图像(每个摄像机内参数不变且位置是固定的),计算景物的度量重构。令运动物体在时刻 1 关于世界坐标系的表示为 X , 在两个摄像机中所成的像分别为 x_1, x_2 ; 在时刻 2 关于世界坐标系的表示为 X' , 在两个摄像机中所成的像分别为 y_1, y_2 。由于物体在两个时刻之间的运动是欧氏运动,即存在欧氏变换 E 使得

$$E = \begin{pmatrix} R & t \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

这里, R 是 3×3 旋转矩阵。因此,点对应 $x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y'$ 必为仿射点对应。

立体视觉平台 假设立体视觉平台作一般刚体运动 E , 从得到的图像计算景物的度量重构^[11,14,15]。这个问题与上面运动景物的重构问题是等价的。因

为立体视觉平台作一般刚体运动 E 所得到静止物体的图像与其在固定的位置上景物作相对的刚体运动所得到的图像是相同的。

三消隐点 已知空间三个方向在图像中的消隐点, 计算度量重构问题^[7,8]. 记 3 个方向的无穷远点 $X_1 = (V_1^T \ 0)^T, X_2 = (V_2^T \ 0)^T, X_3 = (V_3^T \ 0)^T$ 在两幅图像中的投影(即消隐点)分别为 m_1, m_2, m_3 和 m_4, m_5, m_6 . 另取两幅图像的 4 个点对应 $\{m_4, m_5, m_6, m_7\} \leftrightarrow \{m_4, m_5, m_6, m_7\}$, 它们对应的空间点记为 $\{X_4, X_5, X_6, X_7\}$. 令

$$\begin{aligned} x &= \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\} \leftrightarrow x \\ &= \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}, \\ y &= \{m_1, m_2, m_3, m_6, m_7\} \leftrightarrow y \\ &= \{m_1, m_2, m_3, m_6, m_7\}. \end{aligned}$$

它们对应的两组空间点 $x = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ 与 $y = \{X_1, X_2, X_3, X_6, X_7\}$ 所确定的三维射影变换是一个仿射变换, 因为这个射影变换将无穷远平面变换为无穷远平面. 因此 $x \leftrightarrow x, y \leftrightarrow y$ 是仿射点对应.

3 准仿射重构

准仿射重构是一种特殊的射影重构, 它是由 Hartley^[16] 首先引入的. 令无穷远平面在一个射影重构空间中的坐标为 p , 如果三维空间点 $\{S_j\}$ 的射影重构 $\{S_j^p\}$ 的凸包 $\text{hull}(\{S_j^p\})$ 都位于平面 p 的同一侧, 则称这个射影重构为准仿射重构. Hartley 指出, 任何一个射影重构都可以提升到准仿射重构. 这里我们仅介绍准仿射重构算法, 关于准仿射重构更详细的讨论请参考文献^[16~18].

给定 n 幅图像的点对应 $\{m_j^i\}$, 令

$$\begin{aligned} P_1 &= (I \ 0), \quad P_i = (H_i \ e_i), \quad \{S_j^p\}, \\ i &= 2, 3, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5)$$

是这 n 幅图像的一个射影重构. 其中 P_i 是射影重构空间中第 i 幅图像的摄像机投影矩阵, S_j^p 是点对应 $\{m_j^i\}$ 的射影重构. 关于从图像点对应计算射影重构的算法见文献^[17].

射影重构为准仿射重构的充要条件是式(5)中的摄像机矩阵和空间点满足下述条件^[16]. 对所有的 i, j , 式 $P_i \hat{S}_j^p = s_j^i \hat{\omega}_j$ 中的射影深度 s_j^i 有相同的符号, 这里, \hat{S}_j^p 和 $\hat{\omega}_j$ 表示最后一个元素为 1 的齐次坐标. 由文献^[17]中结论 20.16, 我们可以通过求解一个 Cheiral 不等式得到准仿射重构.

4 仿射重构

本节是本文的主体, 主要讨论如何从仿射点对应的准仿射重构计算无穷远平面的法向量, 并讨论了选择无穷远平面法向量的约束条件, 由此将准仿射重构提升为真正的仿射重构.

记由仿射点对应 $x \leftrightarrow x, y \leftrightarrow y$ 所得到的一个准仿射重构为

$$\begin{aligned} P_i^{qa} \left(i = 1, 2, \dots, n \right), \quad qa = \{ X_1^{qa}, X_2^{qa}, \dots, X_m^{qa} \}, \\ qa = \{ Y_1^{qa}, Y_2^{qa}, \dots, Y_m^{qa} \} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $P_i^{qa} (i = 1, 2, \dots, n)$ 是准仿射重构的摄像机投影矩阵, qa, qa 分别是物体 qa 的准仿射重构.

如果在准仿射重构空间中, 无穷远平面为 $qa = (a^T \ 1)^T$, 则可以得到一个仿射重构^[8]:

$$\begin{aligned} P_i^a = (I \ 0), \quad P_i^a = P_i^{qa} \begin{pmatrix} I & 0 \\ a^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (H_i^{qa} - e_i^{qa} a^T \ e_i^{qa}), \\ i = 2, 3, \dots, n; \\ a \begin{pmatrix} I & 0 \\ a^T & 1 \end{pmatrix} \quad qa = \{ X_1^a, X_2^a, \dots, X_m^a \}, \\ a \begin{pmatrix} I & 0 \\ a^T & 1 \end{pmatrix} \quad qa = \{ Y_1^a, Y_2^a, \dots, Y_m^a \}. \end{aligned}$$

这里, “ a ” 表示相差一个非零常数因子意义下的相等, 此符号在本文其它地方具有相同的含义. 因此为了计算仿射重构, 只需在准仿射重构空间中确定无穷远平面 $qa = (a^T \ 1)^T$.

4.1 基本定理

考虑 qa 的准仿射重构 $qa = \{ X_1^{qa}, X_2^{qa}, \dots, X_m^{qa} \}, qa = \{ Y_1^{qa}, Y_2^{qa}, \dots, Y_m^{qa} \}$. 由对应关系 $qa \leftrightarrow qa$, 当 $m \geq 5$ 时可得到准仿射重构空间中的一个(点)射影变换 H_p , 即射影变换 H_p 使得 $qa = H_p \ qa$, 如果下述严格等式成立:

$$Y_i^{qa} = H_p X_i^{qa} \quad (7)$$

则变换矩阵 H_p 是唯一的, 并记这个变换矩阵为 \hat{H}_p .

命题 1(基本定理). 在准仿射重构空间中, 无穷远平面 $qa = (a^T \ 1)^T$ 是矩阵 \hat{H}_p^T 的正特征值对应的特征向量.

证明. 首先证明无穷远平面 $qa = (a^T \ 1)^T$ 是矩阵 \hat{H}_p^T 的实特征值对应的特征向量.

由于 qa, qa 与它们的真实物体 qa 之间相差一个三维(点)射影变换, 即存在矩阵 H_{ep} 使得

$$H_{ep} \ qa, \quad H_{ep} \ qa \quad (8)$$

由式(1)和式(8), 可推知

$$qa \ H_{ep}^{-1} \ H_{ep}^{-1} A \ H_{ep}^{-1} A H_{ep} \ qa,$$



结合式(7),我们有

$$\hat{H}_P = \mu H_{ep}^{-1} A H_{ep} \quad (9)$$

其中 μ 是齐次变换的标量因子. 所以

$$\hat{H}_P^{-T} H_{ep}^T = \cdot H_{ep}^T A^{-T} \quad (10)$$

这里, $\cdot = 1/\mu$. 从式(10)可以看出: v 为 A^{-T} 的特征向量当且仅当 $v_P = H_{ep}^T v$ 为 \hat{H}_P^{-T} 的特征向量. 由三维空间中的点与面对偶性, A^{-T} 是三维空间中的一个面变换, 因此 A^{-T} 的特征向量 v 是它的一个不动平面. 而 H_{ep}^T 表示从欧氏空间到准仿射重构空间的一个面变换, 所以 H_{ep}^T 将欧氏空间中的平面 v 变换到准仿射重构空间的平面 $v_P = H_{ep}^T v$. 由于 A 是仿射变换, 因此无穷远平面是 A^{-T} 的一个不动平面, 即 $(\mathbf{0}^T \ 1)^T$ 是 A^{-T} 的一个特征向量. 于是, qa

H_{ep}^T 是 \hat{H}_P^{-T} 的一个实特征向量, 这里, qa 有形式 $(a^T \ 1)^T$, 它是无穷远平面在准仿射重构空间中的表示. 由于 \hat{H}_P^T 和 \hat{H}_P^{-T} 有相同的特征向量, 所以 qa H_{ep}^T 也是 \hat{H}_P^T 的一个实特征向量.

其次, 我们证明 $^{qa} = (a^T \ 1)^T$ 一定是 \hat{H}_P^T 的正特征值对应的特征向量. 反证: 假定 $^{qa} = (a^T \ 1)^T$ 是 \hat{H}_P^T 的负特征值对应的特征向量, 即 $\hat{H}_P^T \ ^{qa} = \lambda \ ^{qa}$, $\lambda < 0$. 于是有

$$(a^T \ 1) \hat{H}_P = (\lambda a^T \ 1) \quad (11)$$

令 $L(s) = s \hat{X}_1^{qa} + (1-s) \hat{Y}_1^{qa}$, $0 \leq s \leq 1$ 是连接两点 \hat{X}_1^{qa} , \hat{Y}_1^{qa} 的直线段. 由式(7), (11), 我们有

$$\begin{aligned} & (\lambda \ ^{qa})^T (s \hat{X}_1^{qa} + (1-s) \hat{Y}_1^{qa}) \\ &= s (\lambda a^T \ 1) \hat{X}_1^{qa} + (1-s) (\lambda a^T \ 1) \hat{Y}_1^{qa} \\ &= \frac{\lambda}{s} \cdot (a^T \ 1) \hat{H}_P s \hat{X}_1^{qa} + (1-s) (\lambda a^T \ 1) \hat{Y}_1^{qa} \\ &= \left[\frac{\lambda}{s} + (1-s) \right] (a^T \ 1) \hat{Y}_1^{qa}, \end{aligned}$$

取 $s = \lambda / (\lambda - 1)$, 则 $0 < s < 1$ 且 $(\lambda \ ^{qa})^T (s \hat{X}_1^{qa} + (1-s) \hat{Y}_1^{qa}) = 0$, 所以 $(\lambda \ ^{qa})^T \hat{X}_1^{qa}$ 和 $(\lambda \ ^{qa})^T \hat{Y}_1^{qa}$ 有相反的符号, 因此 \hat{X}_1^{qa} , \hat{Y}_1^{qa} 位于无穷远平面 $^{qa} = (a^T \ 1)^T$ 的两侧, 与准仿射重构矛盾. 所以 $^{qa} = (a^T \ 1)^T$ 一定是 \hat{H}_P^T 的正特征值对应的特征向量. 证毕.

为了得到仿射重构, 我们必须从 \hat{H}_P^T 的所有的正特征值对应的特征向量 $v_k = (a_k^T \ 1)^T$ 中确定出无穷远平面 qa . 下面我们将讨论唯一确定无穷远平面 qa 的约束条件.

4.2 唯一性约束

在讨论一般情况之前, 我们先讨论 A 为相似变换的情况. 我们将看出: 在这种情况下, 除了平面(运动)变换外, 均可以唯一确定准仿射重构空间中的无穷远平面 qa .

命题 2. 假定 A 是一个相似变换 S .

(1) 如果 S 不是一个平面(运动)欧氏变换, 则可以唯一确定无穷远平面 qa ;

(2) 如果 S 是一个平面(运动)欧氏变换, 则无穷远平面 qa 不能唯一确定.

证明. 相似变换 S 可以表示为

$$S = \begin{bmatrix} sU & u \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix},$$

其中, s 是相似尺度因子, U 是一个正交矩阵. 不难计算

$$S^{-T} = \begin{bmatrix} s^{-1}U & \mathbf{0} \\ -s^{-1}u^T U & 1 \end{bmatrix}.$$

它有形如 $\{1, s^{-1}, s^{-1}e^{-i}, s^{-1}e^i\}$ 的特征值, 其中, $i = \pm 1$, 当 U 为旋转矩阵时, 取正号; 当 U 为反射矩阵时, 取负号. 容易验证无穷远平面 $^{qa} = (\mathbf{0}^T \ 1)^T$ 是 S^{-T} 的对应于特征值 1 的特征向量. 考虑变换

$$\hat{H}_P^{-T} = H_{ep}^T S^{-T} H_{ep}^{-T} \quad (12)$$

其中 \hat{H}_P , H_{ep} 的意义如前面所述.

(1) 当 $s \neq 1$ 时, \hat{H}_P^{-T} 必有形如 $\{s^{-1}, s^{-1}e^{-i}, s^{-1}e^i\}$ 的特征值. 不难看出 \hat{H}_P^{-T} 关于特征值 s^{-1} 的特征向量 $v_P = (a^T \ 1)^T$ 是在准仿射重构空间中的无穷远平面 qa . 由于 \hat{H}_P^T 的特征值是 \hat{H}_P^{-T} 的特征值的共轭倒数且对应的特征向量相同, 所以 \hat{H}_P^T 有形如 $\{s^{-1}, s^{-1}e^{-i}, s^{-1}e^i\}$ 的特征值且对应于特征值 s^{-1} 的特征向量 $v_P = (a^T \ 1)^T$ 是无穷远平面在准仿射重构空间中的表示. 注意到 s^{-1} 是其模与其它三个特征值的模都不相等的唯一特征值. 因此在这种情况下, 我们可以唯一确定准仿射重构空间中的无穷远平面 qa .

(2) 当 $s = 1$ 时, S 是一个等距变换. 当 U 为旋转矩阵时, S 是一个欧氏变换; 当 U 为反射矩阵时, S 是反射变换(如镜面反射). 下面我们分 S 为欧氏变换和反射变换两种情况来讨论.

当 S 为欧氏变换时, 它必有形如 $\{1, 1, e^i, e^{-i}\}$ 的特征值, 因此 S^{-T} 的特征值也是 $\{1, 1, e^i, e^{-i}\}$. 若 S 为非平面(运动)变换, 即 S 的平移向量不与旋转轴正交的平面平行, 则从附录中的引理及其

注释可知无穷远平面 $\hat{H}_P^T = (\mathbf{0}^T \ 1)^T$ 是 S^{-T} 对应于二重实特征值 1 的唯一的特征向量, 此时 \hat{H}_P^T 有唯一的实特征向量 $v_P = (a^T \ 1)^T$, 它是准仿射重构空间中的无穷远平面^{9a}; 若 S 为平面(运动)变换, 即 S 的平移向量与旋转轴正交的平面平行, 则 S^{-T} 对应于二重实特征值 1 有两个特征向量, 从而 \hat{H}_P^T 必有一个正的二重特征值, 且对应这个二重特征值有两个线性无关的特征向量, 因此对应于正二重特征值有二维特征子空间. 所以, 此时在准仿射空间中, 我们不能唯一确定无穷远平面^{9a}.

当 S 为反射变换时, 它必有形如 $\{1, -1, e^i, e^{-i}\}$ 的特征值, 因此 S^{-T} 的特征值也是 $\{1, -1, e^i, e^{-i}\}$. 因此 \hat{H}_P^T 仅有一个正的实特征值, 根据命题 1, 我们可以唯一确定准仿射重构空间中的无穷远平面^{9a}. 证毕.

当 A 是仿射变换时, 我们有下述命题.

命题 3. 如果仿射变换 A 满足下述条件之一, 则可以唯一确定无穷远平面^{9a}:

- (1) 仅有一个实特征值, 且对应的特征子空间的维数为 1;
- (2) 仅有一个正的和一个负的特征值, 且对应的特征子空间的维数等于 1.

证明是非常容易的, 因为上述任何一个条件都能推出 \hat{H}_P^T 有唯一的正特征值对应的特征向量, 根据基本定理在准仿射重构空间中能唯一确定无穷远平面^{9a}.

对于一般的仿射变换, 我们可以通过施加模约束来确定无穷远平面^{9a}.

模约束⁽¹⁰⁾. 若所有摄像机的内参数相等, 即 $K^i = K (i = 1, 2, \dots, n)$, 则任何两个视点间的无穷远平面的单应矩阵 (Homography) H 的 3 个特征值的模必相等.

令仿射重构的摄像机投影矩阵为

$$P_i^a = (I \ \mathbf{0}), \quad P_i^a = P_i^{qa} \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ a^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (H_i^{qa} - e_i^{qa} a^T \ e_i^{qa}),$$

$$i = 2, 3, \dots, n,$$

可知第 1 个视点与第 i 个视点间的无穷远平面的单应矩阵所有可能解为

$$H_k^{1i} = (H_i^{qa} - e_i^{qa} a_k^T), \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (13)$$

其中 a_k 使得 $(a_k^T \ 1)^T$ 是 \hat{H}_P^T 的正特征值对应的特征向量.

在通常的情况下, 仅存在一个摄像机内参数矩阵 K 和一个唯一的 k 使得矩阵 H_k^{1i} 对每一个 i 都满

足模约束. 这样, 我们可以通过验证矩阵 $H_k^{1i} (i = 2, 3, \dots, n)$ 的所有特征值的模是否相等来确定^{9a}.

注. 模约束在这里只是简单的验证, 不需要求解三元四次方程组.

5 度量重构

由上节, 我们可以从 n 个视点的图像得到一个仿射重构:

$$P_i^a = (I \ \mathbf{0}), \quad P_i^a = (H_i^{qa} - e_i^{qa} a^T \ e_i^{qa}), \{S_j^a\},$$

$$i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

如果已知摄像机的内参数矩阵 K , 则可以得到一个度量重构⁽⁸⁾:

$$P_i^e = P_i^a \begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \quad S_j = \begin{pmatrix} K^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} S_j^a,$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

因此为了计算度量重构, 我们只需计算摄像机的内参数矩阵 K .

记 $C = (K)^{-T} (K)^{-1}$, 它是摄像机关于绝对二次曲线所成的图像, 由仿射重构可以得到 C 的约束方程:

$${}_i C = (H^{1i})^{-T} C (H^{1i})^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (16)$$

其中 $H^{1i} = (H_i^{qa} - e_i^{qa} a^T)$ 是第 1 与第 i 个视点间的无穷远平面的单应矩阵. 对 H^{1i} 归一化使得 $\det(H^{1i}) = 1$, 则 ${}_i C = 1$, 方程 (16) 就成为关于 C 的线性方程组, 通过解方程得到 C , 进而通过 Cholesky 分解得到摄像机内参数矩阵 K .

注. 任意一个方程 (16) 对于 C 最多只能提供 4 个独立的约束, 因此当摄像机为 5 参数模型时, 至少需要两个方程 (即三幅图像) 才能求解出 C 及摄像机内参数矩阵 K .

总结以上各节讨论, 基于仿射点对应的度量重构算法概括如下.

算法 1. 从仿射点对应计算度量重构的算法.

目标:

给定 n 幅未标定的图像和点对应 $\{m_j^i | i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$, 计算一个度量重构 $(P_i^e, \{S_j^e\})$, 其中在 $\{m_j^i\}$ 中存在仿射点对应.

算法:

1. 计算射影重构 (请参考文献 [17] p435):

1.1 由点对应 $\{m_j^i\}$ 恢复射影摄像机矩阵 $P_i = (I \ \mathbf{0})$, $P_i = (H_i \ e_i), i = 2, 3, \dots, n;$

1.2 计算点对应 $\{m_j^i\}$ 的射影重构 $\{S_j^p | j = 1, 2, \dots, m\}$.

2. 计算准仿射重构 (详细过程见第 3 节):

$$P_i^{qa} = P_i (H^{qa})^{-1} = (H_i^{qa} \ e_i^{qa}), \quad S_j^{qa} = H^{qa} S_j^p,$$

$$i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m.$$

3. 计算仿射重构(详细过程见第 4 节):

3.1 由仿射点对应的准仿射重构建立三维射影变换 \hat{H}_p ;

3.2 由 \hat{H}_p^T 的特征向量确定无穷远平面 $q^a = (a^T \ 1)^T$;

3.3 计算仿射重构: $P_i^q = P_i H_a^{-1}, S_j^q = H_a S_j^{q^a}$, 其中 $H_a = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ a^T & 1 \end{bmatrix}$.

4. 计算度量重构(详细过程见本节):

4.1 计算绝对二次曲线的像 $C = (K)^{-T} (K)^{-1}$, 并得到摄像机内参数矩阵 K ;

4.2 计算度量重构: $P_i^c = P_i^q H_c^{-1}, S_j^c = H_c S_j^q$, 其中 $H_c = \begin{bmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$.

$$K = \begin{bmatrix} 1000 & 0.1 & 512 \\ 0 & 1000 & 384 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

三个视点的位置分别是:

(1) $R_1 = I_3 \times 3, t_1 = \mathbf{0}_3 \times 1$, 即以第一个摄像机光心为世界坐标系的原点;

(2) R_2 的旋转轴为 $(0.316, 0.949, 0)^T$, 旋转角为 $-\pi/4$, 光心位置为 $(-4, 2, 1)^T$;

(3) R_3 的旋转轴为 $(0.943, 0.236, 0.236)^T$, 旋转角为 $\pi/4$, 光心位置为 $(1, -6.5, -1)^T$.

空间物体 的点集定义如下: 令空间立方体为 $(-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, 3 \leq z \leq 7)$, 是由该立方体三个相邻面上的格点所构成的空间点集, 每个面上有 25 个格点, 如图 1(a), (c) 所示.

空间物体 的点集是仿射变换 $A = \begin{bmatrix} B & b \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$ 作用在 上的结果(如图 1(b) 所示), 其中矩阵 B 的元素取 -1 到 1 之间的随机数, 适当选取 b 使得空间点对于 3 个视点所成的像都在图像有效区域以内.

6 实验

6.1 仿真实验

在仿真实验中, 摄像机内参数矩阵的真实值为

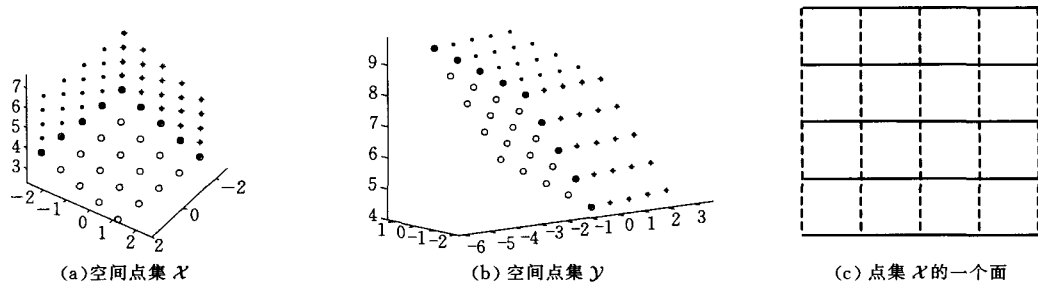


图 1 原始空间点集示意图

在实验中, 图像大小取为 1024×768 像素, 我们对图像点坐标加均值为 0, 均方差 (: 噪声水平) 不同的随机高斯噪声, 每个噪声水平上进行 100 次随机实验, 实验目的是验证本文方法的有效性与鲁棒性.

6.1.1 仿射重构的平行性质

由于保持直线的平行性是仿射重构的本质特

征, 因此我们使用直线的平行性作为检验指标来考察本文所提出的仿射重构方法的有效性和鲁棒性.

从立方体每个面上的两个方向(图 1(c) 中实线方向和虚线方向)可以得到两组平行直线, 3 个面共有 6 组平行直线, 表 1 给出了仿射重构直线间夹角的均值, 图 2 是仿射重构直线间夹角随噪声变化的

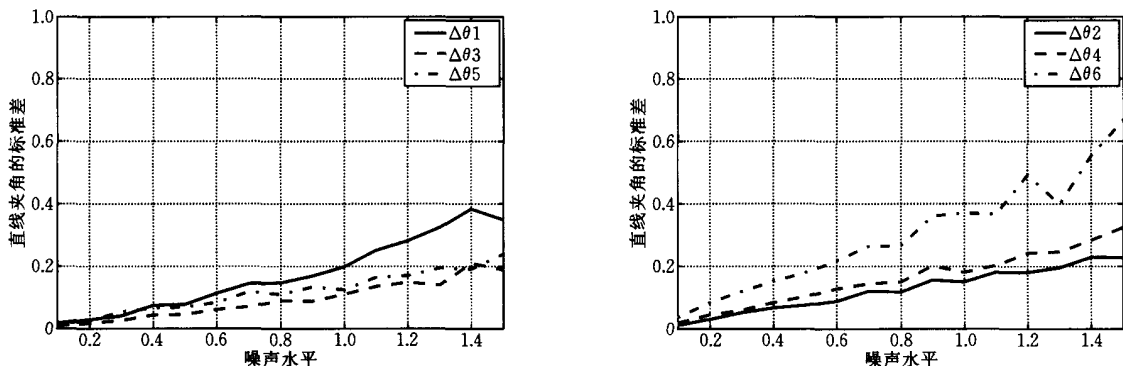


图 2 平行直线的仿射重构直线间夹角随噪声变化的标准差曲线

标准差曲线. 从实验结果可以看出:即使在 1.5 个像素的噪声水平下, 每组平行直线的仿射重构直线间夹角的均值仍不超过 1°, 标准差也在 1° 以下, 这表明本文的仿射重构方法是有效的并且有相当好的精度.

表 1 平行直线的仿射重构直线间的夹角的均值

噪声水平	1	2	3	4	5	6
0.1	0.0267	0.0310	0.0227	0.0440	0.0319	0.0593
0.2	0.0536	0.0649	0.0430	0.0843	0.0608	0.1105
0.5	0.1360	0.1538	0.1197	0.2275	0.1461	0.3067
0.8	0.2275	0.2135	0.1868	0.3164	0.2226	0.3973
1.0	0.3224	0.3384	0.2526	0.4333	0.2975	0.6153
1.2	0.4003	0.3687	0.3078	0.5402	0.3581	0.7303
1.5	0.5457	0.4772	0.3691	0.6667	0.4472	0.8403

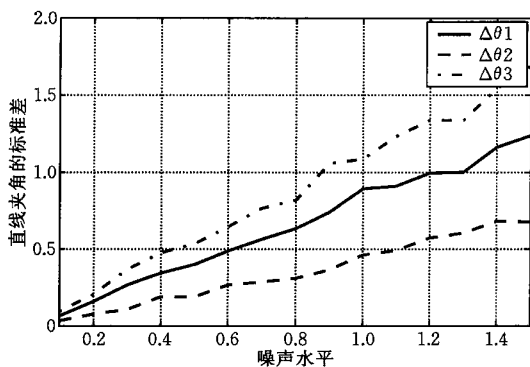
6.1.2 度量重构的垂直性质

度量重构的一个重要性质是所谓的“保角特性”, 即在原始的欧氏空间中相互垂直的直线, 在度

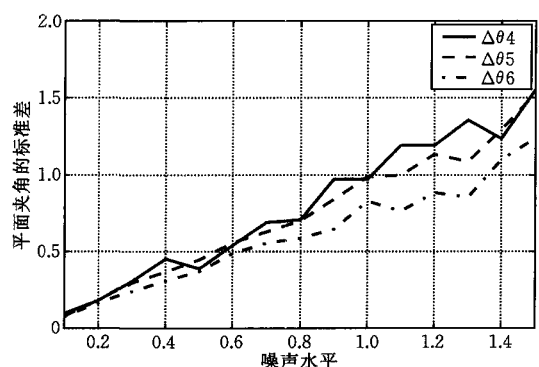
量重构空间中也应当是垂直的. 这里, 我们考察实线和虚线两个方向的直线得到的度量重构是否垂直. 表 2 中, 1, 2, 3 是 3 个平面上的垂直直线的度量重构之间夹角的平均值. 另外, 我们还考察了立方体 3 个相互垂直平面的度量重构平面之间的夹角, 表 2 中, 4, 5, 6 是实验结果. 从表 2 和图 3 可以看出, 即使噪声增加到 1.5 个像素时, 仍能很好地保持垂直性.

表 2 垂直直线及平面的度量重构的夹角

噪声水平	1	2	3	4	5	6
0.1	89.9943	90.0024	89.9763	89.9969	89.9974	89.9977
0.2	89.9747	90.0271	89.9777	89.9874	89.9988	89.9923
0.5	89.9818	90.0469	89.9923	90.0053	90.0326	89.9232
0.8	90.0036	90.1156	89.9519	90.2743	89.8918	90.0883
1.0	90.1265	90.1419	90.1012	90.2671	89.7877	90.0707
1.2	89.8902	90.3617	89.7214	90.4566	89.8969	90.0144
1.5	89.8165	90.5684	89.8293	90.4453	89.4772	90.1434



(a) 垂直直线的度量重构之间夹角随噪声变化的标准差曲线



(b) 垂直平面的度量重构之间夹角随噪声变化的标准差曲线

图 3

6.1.3 标定摄像机内参数

考察分层重构的另一个重要指标是摄像机内参数, 因为仿射重构的精度直接影响摄像机内参数的计算精度, 而度量重构的精度密切依赖于摄像机内参数的计算精度. 在实验中我们将度量重构过程中所获得的摄像机内参数与它的真实值进行比较.

在不同的噪声水平下, 进行 100 次随机实验所得到的各个内参数均值见表 3; 图 4 给出了内参数随不同噪声变化的标准差曲线, 从中可以看出, 本文算法具有很好的鲁棒性.

表 3 不同噪声水平下的内参数均值

噪声水平	f_u	f_v	u_0	v_0	s
0.1	1000.0	999.8	512.2	384.0	1.32
0.2	1000.0	1000.4	511.7	384.2	2.56
0.5	1000.1	1001.3	510.8	383.6	6.96
0.8	1000.6	999.6	512.8	383.6	11.12
1.0	999.6	1002.4	511.7	383.9	12.38
1.2	999.3	1003.6	514.3	387.2	17.64
1.5	1001.2	1006.1	512.5	385.3	19.69

6.2 真实图像实验

真实图像实验中的三幅图像(如图 5 所示)来自 Nikon CoolPix990 数码相机, 图像大小为 1024 × 768, 拍摄过程中保持摄像机内参数不变. 场景中存在两个物体, 其中一个是由正方形格子构成表面的定标块, 另一个是由长方形格子构成表面的长方体, 两个物体间相差一个仿射变换.

使用本文方法, 无穷远平面在准仿射重构空间中的坐标为 $q^a = (0.0025 \quad -0.0006 \quad 3.2005 \quad 1)$, 第 1 幅图像与第 2 幅图像、第 1 幅图像与第 3 幅图像间的无穷远平面的单应矩阵分别为

$$H^{12} = \begin{pmatrix} 0.6942 & -0.2301 & 892.3429 \\ 0.1521 & 0.9841 & -64.8883 \\ -0.0003 & 0.0001 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H^{13} = \begin{pmatrix} 0.9987 & 0.0289 & 421.4300 \\ 0.1279 & 1.1480 & -647.5093 \\ -0.0001 & 0.0002 & 1 \end{pmatrix}.$$

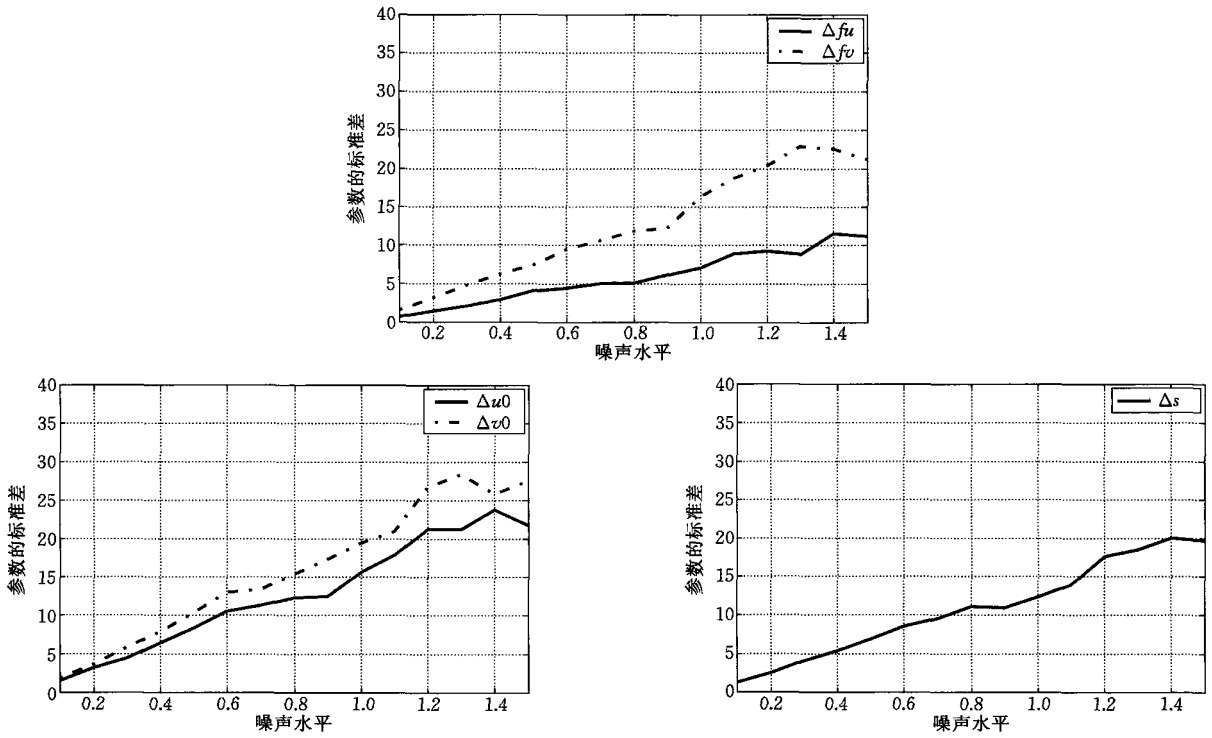


图 4 内参数标准差随噪声变化曲线

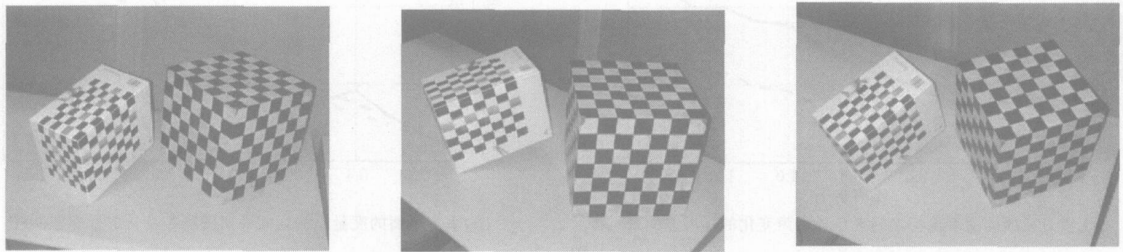


图 5 三幅原始图像

由无穷远平面^{qa},利用本文算法可以计算物体的仿射重构.图6是仿射重构的三维点集在两个视点下的图示,可以看出,平行性质得到了很好的保持.

由上述无穷远平面的单应矩阵解出的摄像机内参数矩阵为

$$K = \begin{pmatrix} 1572.7 & -26.8 & 506.8 \\ 0 & 1598.0 & 425.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

度量重构得到的两个物体上两个面之间的夹角分别是 89.3°和 88.3°,每个面内垂直方向的直线间的夹角分别为 87.6°,89.3°,87.7°和 89.1°,都比较接近 90°.另外定标块表面的正方形格子重构后的平均相对长度为 0.0120 和 0.0116,二者之比也接近于 1,因此重构后的物体较好地恢复了场景的度量性质,这表明本文的算法对真实图像也是有效的.图7给出了物体的度量重构在不同视点下的结果.

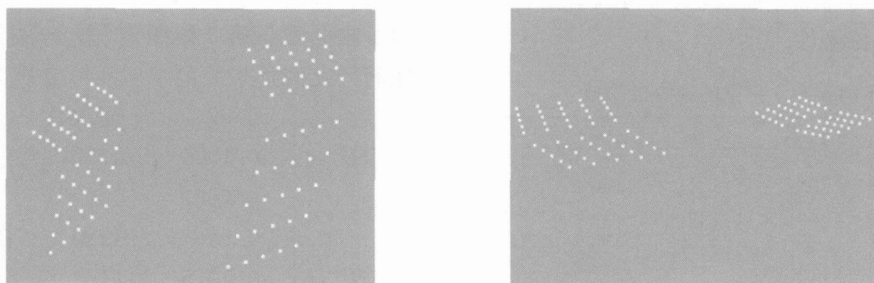


图 6 仿射重构的三维点集在不同视点下的图示

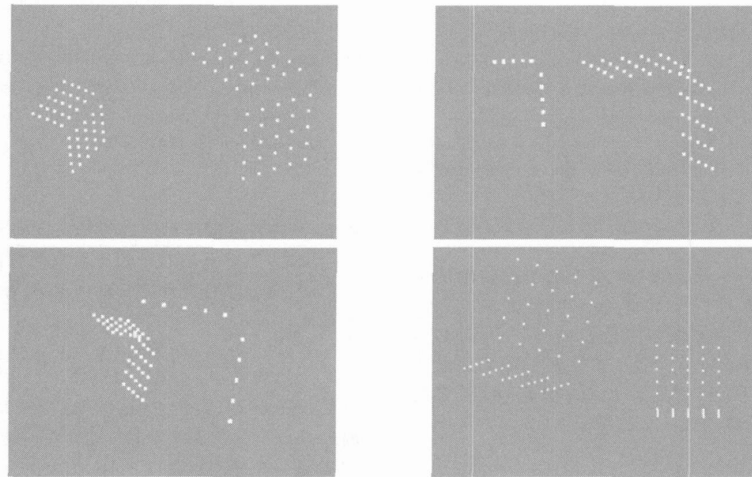


图 7 度量重构的三维点集在不同视点下的图示

7 结束语

本文给出了一种基于仿射点对应的分层重构方法. 该方法首先从点对应计算射影重构和准仿射重构;再根据仿射点对应的准仿射重构建立一个三维射影变换,由这个射影变换的正特征值对应的特征向量来确定无穷远平面,从而得到仿射重构;最后从仿射重构计算出摄像机的内参数矩阵,进而得到度量重构. 仿真和真实图像实验表明,本文的算法具有很好的鲁棒性和稳定性,而算法的鲁棒性的理论分析将是进一步工作的重点.

参 考 文 献

- 1 Weng J. , Cohen P. , Herniou M. . Camera calibration with distortion models and accuracy evaluation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligent* , 1992 , 14 (10) : 965 ~ 980
- 2 Ma Song-De , Zhang Zheng-You. *Computer Vision*. Beijing: Science Press , 1995 (in Chinese)
(马颂德,张正友. 计算机视觉. 北京:科学出版社,1995)
- 3 Faugeras O. , Luong Q. T. , Maybank S. . Camera self-calibration: Theory and experiments. In: *Proceedings of European Conference on Computer Vision* , Italy , 1992 , 321 ~ 334
- 4 Pollefeys M. , Gool Van L. , Oosterlinck A. . The modulus constraint: A new constraint for self-calibration. In: *Proceedings of International Conference on Pattern Recognition* , Vienna , Austria , 1996 , 349 ~ 353
- 5 Triggs B. . Auto-calibration and the absolute quadric. In: *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* , Puerto Rico , USA , 1997 , 609 ~ 614
- 6 Hartley R. I. . Euclidean reconstruction and invariants from multiple images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligent* , 1994 , 16(10) : 1036 ~ 1041
- 7 Caprile B. , Torre V. . Using vanishing points for camera calibration. *International Journal of Computer Vision* , 1990 , 4 : 127 ~ 140
- 8 Cipolla R. , Drummond T. , Robertson D. P. . Camera calibration from vanishing points in images of architectural scenes. In: *Proceedings of British Machine Vision Conference* , Nottingham , Britain , 1999 , 2 : 382 ~ 391
- 9 Sturm P. , Maybank S. . On plane-based camera calibration: A general algorithm, singularities, applications. In: *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* , Colorado , USA , 1999 , 432 ~ 437
- 10 Fitzgibbon A. W. , Zisserman A. . Multibody structure and motion: 3-d reconstruction of independently moving objects. In: *Proceedings of European Conference on Computer Vision* , Dublin , Ireland , 2000 , 891 ~ 906
- 11 Horaud Radu , Csurka Gabriella. Selfcalibration and euclidean reconstruction using motions of a stereo rig. In: *Proceedings of International Conference on Computer Vision* , Bombay , India , 1998 , 96 ~ 106
- 12 Mitsumoto H. , Tamura S. , Okazaki K. , Kajimi N. , Fukui Y. . 3-D reconstruction using mirror images based on a plane symmetry recovering method. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligent* , 1992 , 14(9) : 941 ~ 946
- 13 Huynh D. Q. . Affine reconstruction from monocular vision in the presence of a symmetry plane. In: *Proceedings of International Conference on Computer Vision* , Kerkyra , Greece , 1999 , 476 ~ 482
- 14 Zhang Z. , Luong Q. -T. , Faugeras O. . Motion of an uncalibrated stereo rig: Self-calibration and metric reconstruction. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* , 1996 , 12(1) : 103 ~ 113
- 15 Zisserman A. , Beardsley P. A. , Reid I. D. . Metric calibration of a stereo rig. In: *Proceedings of the IEEE Workshop on Representation of Visual Scenes* , Cambridge , USA , 1995 , 93 ~ 100
- 16 Hartley R. I. . Chirality. *International Journal of Computer Vision* , 1998 , 26(1) : 41 ~ 61
- 17 Hartley R. I. , Zisserman A. . *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge: Kluwer Academic Publishers , 2000 , 435 , 508
- 18 Hartely R. I. , de Agapite L. , Haman E. , Reid I. . Camera calibration and the search for infinity. In: *Proceedings of International Conference on Computer Vision* , Kerkyra , Greece , 1999 , 510 ~ 517
- 19 Faugeras O. . Stratification of 3-dimensional vision: Projective ,

affine, and metric representations. Journal of the Optical Society of America, 1995, 12(3): 465~484

20 Hartley R. I., Gupta R., Chang T.. Stereo from uncalibrated cameras. In: Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Urbana Champaign, USA, 1992, 761~764

21 Kazhdan M., Chazelle B., Dobkin D., Finkelstein Adam, Funkhouser Thomas. A reflective symmetry descriptor. In: Proceedings of European Conference on Computer Vision. Copenhagen, Denmark, 2002, 642~656

附 录

引理 1. 设 E 是一个欧氏变换, 则正交于旋转轴的平面上的两个圆环点是 E 的两个不动点, 它们是 E 的共轭复特征值对应的特征向量; 旋转轴方向是 E 的另一个不动点, 它是 E 的特征值 1 对应的特征向量. 如果 E 为非平面欧氏运动, E 仅有上述 3 个不动点; 如果 E 为平面运动, 则 E 的特征值 1 对应的特征向量构成一个二维子空间.

证明. 欧氏变换

$$E = \begin{pmatrix} R & t \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

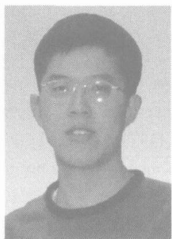
的不动点由 E 的特征向量所确定. 下面我们考虑欧氏变换 E 的特征向量. 由于 $\det(sI_{4 \times 4} - E) = (s-1)\det(sI_{3 \times 3} - R)$, 所以 E 的特征值必为 $\{e^j, e^{-j}, 1, 1\}$, 其中 j 是 R 的旋转角. 显然, E 有如下 3 个线性无关的特征向量:

$$E_1 = (i_R^T \ 0)^T, \quad E_2 = (-i_R^T \ 0)^T, \quad E_3 = (a_R^T \ 0)^T,$$

其中, $i_R, -i_R$ 是 R 的共轭复特征值对应的特征向量, E_1, E_2 表示与旋转轴正交的平面上的两个圆环点; a_R 是 R 的特征值 1 对应的特征向量, 表示 R 的旋转轴, 所以 E_3 是旋转轴的方向.

若 E 是一个平面运动, 则 $a_R^T t = 0$, 由于 $R^T a_R = R^{-1} a_R = a_R$, 所以 $a_R^T (I - R) = a_R^T - a_R^T R = a_R^T - a_R^T = 0$, 综合上述两式可得 $a_R^T (I - R \ t) = 0$, 故

$$\text{rank} \begin{pmatrix} I - R & -t \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix} = 2$$



ZHANG Hui-Feng, born in 1976, Ph.D.. He is a research post-doctor in University of Technology, Sydney, Australia. His research interests include image matching, camera calibration, 3D reconstruction and pattern recognition.

Background

The work in this paper is part of the project "3D Reconstruction and Image Retrieval by 3D Features". 3D Reconstruction, which means getting the 3D structure of object from its 2D images, is the most fundamental and important problem in computer vision. The group has focused on this subject for several years. The authors have more than 100 papers published in high level international journal, national journal and international conference. The main component of 3D reconstruction includes image matching, camera calibrating, reconstructing 3D points, triangulation and texture mapping. In this paper, the authors proposed a new stratified reconstruction algorithm, which deals with the 3D reconstruction problem in

因此, E 的特征值 1 对应的特征向量构成一个二维子空间.

反之, 如果 E 的特征值 1 对应的特征向量构成一个二维子空间, 则必然有另外的特征向量 E_4 有形式 $E_4 = (x^T \ 1)^T$. 于是从

$$\begin{pmatrix} R & t \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

可知 $(I - R)x = t$, 因此 $a_R^T t = a_R^T (I - R)x = a_R^T x - a_R^T R x = a_R^T x - a_R^T x = 0$, 这表示平移向量 t 在与旋转轴正交的平面上, 即 E 是一个平面运动. 证毕.

注. 对于欧氏运动变换 E , 其特征值是 $\{1, 1, e^j, e^{-j}\}$, 显然 E 和 E^{-T} 的特征值也是 $\{1, 1, e^j, e^{-j}\}$. 由引理可知, 当 E 为非平面运动时, 其特征值 1 对应的特征向量子空间是一维的, 即 $\text{rank} \begin{pmatrix} R - I & t \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix} = 3$, 对于 $E^T = \begin{pmatrix} R^T & \mathbf{0} \\ t^T & 1 \end{pmatrix}$, 由于

$\text{rank} \begin{pmatrix} R^T - I & \mathbf{0} \\ t^T & 0 \end{pmatrix} = 3$, 故其特征值 1 对应的特征向量子空间也是一维的, 又因为对应于特征值 1, E^T 和 E^{-T} 具有相同的特征向量, 所以 E^{-T} 对应于特征值 1 的特征向量子空间也是一维的. 类似的, 当 E 为平面运动时, $\text{rank} \begin{pmatrix} R - I & t \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix} = 2$, 相应地,

$\text{rank} \begin{pmatrix} R^T - I & \mathbf{0} \\ t^T & 0 \end{pmatrix} = 2$, E^T 的特征值 1 对应的特征向量子空间也是二维的, 从而 E^{-T} 对应于特征值 1 的特征向量子空间也是二维的.

WU Fu-Chao, born in 1957, professor and Ph.D. supervisor. His current research interests include camera calibration, 3D reconstruction, vision guided robot navigation.

HU Zhan-Yi, born in 1961, professor and Ph.D. supervisor. His current research interests include camera calibration, 3D reconstruction, active vision, geometric primitive extraction, vision guided robot navigation.

three main steps. First, the quasi-affine reconstruction is obtained from correspondences of image points; Second, the 3D projective transformation matrix between the two sets of quasi-affinely reconstructed points in the first step is computed, then the eigenvector which corresponds to the plane at infinity is determined, by which the quasi-affine reconstruction is upgraded to a true affine reconstruction; Third, the camera intrinsic parameters are calibrated by means of the infinite homography obtained in the second step, and a metric reconstruction is obtained. Through these three steps, a robust reconstruction algorithm can be obtained. Experiments on simulated data and on real images confirm the robustness of the new algorithm.